Mathematik für das 21te Jahrhundert

Ein Einblick in die moderne Mathematik für
Studienanfänger und Neugierige

$$\mathbb{N} \models 1 + 1 = \mathsf{succ}(1)$$

Jon Nedelmann

Mathematik für das 21te Jahrhundert

Erste Auflage September 2014

erschienen im Selbstverlag, Darmstadt

Autor: Jon Nedelmann, Parcusstraße 13, 64293 Darmstadt

Druck: www.online-druck.biz

Kontakt: 21@mohhow.org
ISBN: 978-3-00-046973-2

Einleitung

Wissen, so sagt man, ist im einundzwanzigsten Jahrhundert die wichtigste Ressource unserer Gesellschaft geworden. Was man aber wissen sollte, ist wiederum eine Frage, die nicht leicht zu beantworten ist. Bei der Suche nach einem gemeinsamen Nenner stellen viele *mathematisches Wissen* in den Vordergrund, denn angeblich ist Mathematik die Sprache, mit der die Wissenschaft die Natur beschreibt und in der Techniker miteinander kommunizieren. Andererseits kommen wir in unserem Alltagsleben selten mit mathematischen Problemen in Berührung, die nicht mit dem, was wir in der Schule bis zur siebten Klasse gelernt haben, zu lösen sind.

Dieses kleine Skriptum stellt einige mathematische Ergebnisse und Methoden vor. Gedacht ist es für Leser, die demnächst ein Mathematik- oder Informatikstudium aufnehmen wollen, aber auch für Naturwissenschaftler, Ingenieure und alle, die sich einfach so für Mathematik interessieren. Im Vordergrund stehen Fähigkeiten, die ein mathematisch denkender Mensch haben sollte; um welche es sich handelt, kann den Kapitelüberschriften entnommen werden. Damit soll eine kleine Einstimmung gegeben werden, wie Mathematik an der Universität vermittelt wird und wie sie sich von der Schulmathematik unterscheidet. Der Text ist so knapp gehalten, dass er problemlos während eines Sommerurlaubs durchgearbeitet werden kann (z. B. zwischen Abitur und Studienbeginn). Es ist nicht meine Absicht, die Themen, die normalerweise in den ersten Semestern unterrichtet werden, vorwegzunehmen.

So ist auch die Auswahl der Themen sehr subjektiv, geprägt von meiner Arbeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Universität Darmstadt. Mein Ziel wäre erreicht, wenn ein Leser ein "Gefühl" für Mathematik entwickelt und sich nach der Lektüre auf die Mathematikvorlesungen an der Universität freut.

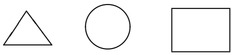
Mathematische Texte werden gerne in einer "Wir-Form" geschrieben, mit der der Autor dem Leser anbieten will, dass beide sich "gemeinsam" durch die Höhen und Tiefen des Texts durcharbeiten. Auch ich schließe mich diesem wir an. Worte oder Ausdrücke, die neu eingeführt werden, sind **fett** gedruckt. Diese Worte sind auch im Index zu finden. Jeder Abschnitt endet mit Übungsaufgaben, die in ihrem Schwierigkeitsgrad variieren. In einem letzten Abschnitt habe ich zu allen Aufgaben Lösungsvorschläge angegeben. Dort sind auch noch Empfehlungen zur weiteren Literatur zu finden.

Schließlich eine Warnung: Mathematische Texte lassen sich nicht wie die Zeitung am Frühstückstisch lesen. An einigen Stellen wird man hängenbleiben, ab und zu muss man zurückblättern, und einiges ist einfacher zu verstehen, wenn es auf einem Schmierblatt nachvollzogen wird. Du solltest also immer Papier und Bleistift bei der Lektüre griffbereit haben.

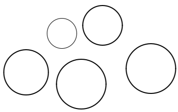
Inhaltsverzeichnis

1 Zählen

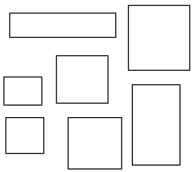
Wir wollen unsere ersten Ideen auf unserer Intuition aufbauen und vergessen, was wir schon alles wissen über Zahlen, Arithmetik und desgleichen. Versetzen wir uns in die Lage eines kleinen Kindes, das gerade gelernt hat, verschiedene Formen zu unterscheiden und zu benennen wie z. B. Dreiecke, Kreise und Rechtecke.



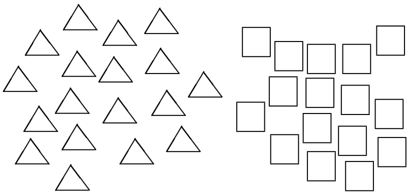
Betrachten wir nun ein Bild mit einigen Kreisen



und eines mit Rechtecken.



Bei beiden Bildern gelingt es, einen unmittelbaren Eindruck der **Anzahl** der Gegenstände zu erhalten; vor allem stellen wir fest, dass wir mehr Rechtecke als Kreise sehen. Schon bei dem nächsten Bild gelingt dies nicht mehr auf einem Blick:



Woran liegt das? Wir haben nur ein schwache Auffassungsgabe bei der Beurteilung von Anzahlen. Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass die Grenze bei etwa sieben Objekten liegt. Bestimmte Tiere übertreffen uns Menschen deutlich. Raben können angeblich Anzahlen bis vierzehn erkennen[1]. Das heißt, sie haben ein Gespür, ob vor ihnen vierzehn, zwölf oder nur drei Gegenstände liegen. Jenseits der vierzehn fängt für Raben die Unendlichkeit an, sie haben nur noch ein Gespür, dass dort viele Gegenstände sind.

Fängt für den Menschen damit die Unendlichkeit bei acht an? Nein, wir helfen unserer Intuition auf die Sprünge, indem wir anfangen zu ordnen, Muster zu suchen, eine Reihenfolge festzulegen - in anderen Worten, indem wir anfangen zu zählen. Wir nehmen zum Beispiel unsere Finger zum

[1]siehe *O. Koehler*, The ability of birds to 'count', Bull. Animal Behaviour 9 (1950)

Abzählen, eine Tätigkeit, die dem Raben schwer fallen wird, oder zeichnen Dreiecke und Rechtecke nocheinmal, diesmal aber in zwei Zeilen untereinander angeordnet.

△ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △ △
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Es springt uns sofort ins Auge, dass es mehr Drei- als Rechtecke gibt, wir können dieses mehr auch quantifizieren: △△. Einfacher ist es natürlich, statt △ oder □ einen Strich zu malen, damit erhalten wir die Strichlisten

|||||||||||||||||| ||||||||||||||||

Jetzt können wir simultan auf beiden Seiten Striche wegstreichen bis auf einer Seite kein Strich mehr vorhanden ist. Übriggeblieben ist ||, im besten Einklang mit △△. Die Methode mit den Strichen wird schnell mühselig und ist fehleranfällig. Geschickter ist eine Darstellung der Form

$$\cancel{||||}\ \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ |||$$

Das bedeutet, nach |||| Strichen streichen wir mit dem nächsten diese durch, und wir erhalten einen **Block** $\cancel{||||}$. Aber auch das wird schnell unübersichtlich, z. B. hat dieses Skriptum

$$\begin{array}{cccccccc}
\cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} \\
\cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} \\
\cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||} & \cancel{||||}
\end{array}$$

Seiten. Wir suchen also eine kompaktere Schreibweise als unsere Strichlisten. Bevor wir uns diesem Problem widmen, klären wir einen Begriff. Wir werden oft Dingen Namen geben, damit wir sie unterscheiden und benennen können. Manchmal werden wir so viele Namen vergeben, dass einem schwindelig werden könnte. Der Stoff, aus dem diese Namen gebildet werden, sind **Symbole**. Was genau ein Symbol sein soll, ist eine knifflige Frage, die wir hier auch nicht beantworten wollen. Meistens werden wir Zeichen wie zum Beispiel

$$A, b, \mathbf{A}, \phi, \aleph, \mathbb{C}, *, \hat{}$$

benutzen und von dem Dreieck A, der Zahl b, der Klasse $\mathbb{C}$, dem Ausdruck $*$ sprechen. Wann zwei solche Zeichen als das gleiche Symbol angesehen werden, wird meistens stillschweigend vom Autor vorausgesetzt. Manche Betriebssysteme eines Computers unterscheiden nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben. Für so ein System wäre A und a dasselbe Symbol. In den meisten mathematischen Texten wie auch in diesem wird sehr wohl zwischen Klein- und Großbuchstaben unterschieden; meistens hat der Autor gewisse Intentionen bei der Wahl, so wird man oft Ausdrücke der Form $x \in X$, aber selten welche der Gestalt $X \in x$ finden. Desweiteren wird gerne Fettdruck zur Unterscheidung von Symbolen benutzt, so sollen A und $\mathbf{A}$ zwei verschiedene Dinge darstellen. Verschiedene Schriftgrößen werden meistens nicht zur Unterscheidung benutzt, so stellen die Sterne

$$* \qquad {\scriptstyle *} \qquad {\Large *}$$

ein und dasselbe Symbol dar. Bei verschiedenen Schriftarten ist Vorsicht angebracht; A und $\mathbb{A}$ sollen bestimmt verschiedene Symbole darstellen, aber ob das auch für A und A zutrifft, ist fragwürdig. Oft werden gerne an ein Zeichen andere Zeichen angehängt, so sollen A, A^{eq}, $\underline{A}$ verschiedene Symbole sein, die aber meist mathematische Objekte beschreiben, die in einem bestimmten Zusammenhang stehen; etwa in der Form, "A^{eq} entsteht aus A, indem..." Letztendlich müssen wir ein gewisses Gespür entwickeln, was welches Symbol ist.

Später werden wir viel mehr als Symbol zulassen: jedes mathematische Objekt, das ein reines Gedankenkonstrukt ist, kann selbst wieder als Symbol dienen. Damit werden wir Symbole haben, die wir nicht in Zeichen hinschreiben können – wir müssen gar nicht einmal erträumen können, wie diese Symbole aussehen.

Das Symbol, das wir bis jetzt benutzt haben, ist |, der Strich. Aus diesem haben wir Ausdrücke gebildet, die Strichlisten. Auf ähnliche Weise, nämlich einfach durch Hintereinanderschreiben, wollen wir Ausdrücke konstruieren, die aus mehreren Symbolen bestehen. Bei dem Umgang mit diesen neuen Ausdrücken benutzen wir Formulierungen wie, "das am weitesten rechts stehende Symbol", "eins nach links schieben", die selbsterklärend sind.

Wir führen nun neue Symbole ein, zum Beispiel ! für |, @ für || und # für |||. Dieses Spiel könnten wir noch eine Weile weiterspielen, aber je länger wir weiterspielen, desto mehr Symbole müssen wir uns merken; darum hören wir lieber wieder schnell auf: Sagen wir, % steht für |||| und ∗ für |||||. Wie stellen wir dann aber die Strichliste |||||| dar?

Wir nehmen wieder das Symbol für |, also !, und schieben es eine Stelle weiter nach links; um dies erkenntlich zu machen, brauchen wir noch ein Symbol, wir nehmen □, das an der rechten Stelle als Platzhalter steht; also entspricht |||||| gerade !□. Nun können wir problemlos fünfmal weiterzählen

!! entspricht |||||||
!@ entspricht ||||||||
!# entspricht |||||||||
!% entspricht ||||||||||
!∗ entspricht |||||||||||

Als nächstes verändern wir das linke Symbol:

@□ entspricht ~~||||~~ ~~||||~~ ||

Den nächsten Sprung machen wir bei ∗∗. Hier zählen wir als nächstes !□□. Für die oben angegebene Strichliste erhalten wir z.B. #@%.

Interessiert uns die Anzahl von Drei- und Rechtecken zusammen, dann hängen wir einfach die beiden Strichlisten

|||||||||||||||||| ||||||||||||||

hintereinander und erhalten

$$||||||||||||||||||||||||||||||||$$

Wir sagen dann, wir **addieren** die beiden Strichlisten miteinander, nennen die neu entstandene Strichliste die **Summe** und schreiben auch

$$|||||||||||||||||| + ||||||||||||||$$

für diese neue Strichliste.

Dasselbe funktioniert auch in der komfortableren Blockschreibweise, indem wir einfach die Blöcke hintereinanderschreiben und uns um die losen Striche danach kümmern. Also stimmen die folgenden beiden Strichlisten überein:

$$\cancel{||||}\ \cancel{||||}\ |||\ +\ \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ ||||\qquad \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ \cancel{||||}\ ||$$

Komplizierter wird die Addition, wenn wir die Symbole $\square$, !,@, #, %, $*$ benutzen. Wir schauen uns zuerst ein paar kleine Fälle an, indem wir Strichlisten addieren und das Ergebnis in die neue Schreibweise übersetzen:

$$\begin{array}{cc}
| + | \text{ wird zu } || & !+! \text{ wird zu } @ \\
| + || \text{ wird zu } ||| & ! + @ \text{ wird zu } \# \\
| + ||| \text{ wird zu } |||| & ! + \# \text{ wird zu } \% \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Das können wir in einer Tabelle zusammenfassen:

+	!	@	#	%	*
!	@	#	%	∗	!□
@	#	%	∗	!□	!!
#	%	∗	!□	!!	!@
%	∗	!□	!!	!@	!#
∗	!□	!!	!@	!#	!%

Geht es darum, zwei Ausdrücke zu addieren, die aus mehr als einem Zeichen bestehen, dann schreiben wir diese untereinander, so dass die Zeichen rechtsbündig untereinander stehen, und ziehen darunter einen Strich, z. B.

$$\begin{array}{rrr} ! & @ & * \\ & \% & ! \\ \hline \end{array}$$

Nun addieren wir die beiden Symbole, die am weitesten rechts stehen; besteht das Ergebnis aus zwei Zeichen, dann nennen wir das Zeichen links den **Übertrag**. Das rechte Zeichen dieser Summe notieren wir unter dem Strich unter den beiden gerade addierten Zeichen, den Übertrag notieren wir, etwas kleiner, eine Stelle weiter links über dem Strich. Nun wiederholen wir eine Stelle weiter links das Prozedere, addieren aber nicht nur die beiden Zeichen, sondern auch noch den gegebenenfalls entstandenen Übertrag dazu. Wir addieren also zweimal, zuerst die beiden Zeichen, dann die Summe mit dem Übertrag. Dabei können zwei neue Überträge entstehen, die wir wiederum addieren. Die Summe der beiden Überträge besteht aber nur aus einem Zeichen und wird der neue Übertrag, der eine Stelle weiter links notiert wird. Dann geht es wieder eine Stelle weiter nach links. Kommen wir nun soweit, dass einer der beiden Ausdrücke auch mit Übertrag abgearbeitet ist, dann werden einfach die Symbole des verbliebenen Ausdrucks übernommen, das heißt, es wird unter dem Strich notiert, was über dem Strich steht. Für das Beispiel oben erhalten wir das folgende Resultat:

$$\begin{array}{ccc} ! & @ & * \\ {}_{!} & \%_{!} & ! \\ \hline @ & ! & \square \end{array}$$

Vorsicht, nun haben wir zum ersten Mal ein Rechenschema, oder etwas eleganter formuliert, einen **Algorithmus** kennengelernt, von dem wir wissen, wie wir ihn benutzen, aber nicht, warum das Ergebnis das ist, was es auch sein soll. Wie solche Erklärungen gegeben werden können, ist zentrales Thema dieses Texts. Wir kommen später, wenn wir auf mehr theoretisches Wissen zurückgreifen können, auf diesen Algorithmus zurück.

Wir können einen Ausdruck mit sich selbst addieren, das Ergebnis nocheinmal mit dem Ausdruck und so weiter. Machen wir uns das ganze an unseren Strichlisten einmal deutlich, z. B.

$$||||||||$$

addiert mit sich selbst ist

|||||||||||||||

oder übersichtlicher

|||||||||
|||||||||

Wenn wir nocheinmal |||||||| zu dem Ergebnis addieren, erhalten wir

Diese Ergebnisse können wir auch folgendermaßen notieren: wir notieren unsere ursprüngliche Strichliste, und für jede Zeile machen wir einen Strich in einer weiteren Liste. Diese beiden Listen dürfen wir nicht einfach hintereinanderschreiben, denn es handelt sich ja nicht um die Summe, stattdessen trennen wir sie durch das Symbol ×, schreiben also

|||||||| × |, ||||||||| × ||, |||||||| × |||, ...

und sprechen von dem **Produkt** von |||||||| mit | bzw. || bzw. |||, und sagen, dass wir die entsprechenden Strichlisten **multiplizieren**.

Damit taucht sofort die Frage auf, wie wir die Multiplikation mittels der Symbole □, !, @, #, %, ∗ beschreiben können.

Für kleine Werte, z. B. für einstellige Ausdrücke, machen wir das wieder, indem wir Ergebnisse, die wir mit Hilfe von Strichlisten erhalten haben, in die komplexere Schreibweise übersetzen, also

$$\begin{array}{cc}
| \times | \text{ wird zu } | & !\times! \text{ wird zu } ! \\
| \times || \text{ wird zu } || & ! \times @ \text{ wird zu } @ \\
\vdots & \vdots \\
|| \times ||| \text{ wird zu } |||||| & @ \times \# \text{ wird zu } !\Box \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Das Ganze können wir wieder in einer Tabelle festhalten:

×	!	@	#	%	∗
!	!	@	#	%	∗
@	@	%	!□	!@	!%
#	#	!□	!#	@□	@#
%	%	!@	@□	@%	#@
∗	∗	!%	@#	#@	%!

Haben wir zwei Ausdrücke, bei denen mindestens einer aus mehreren Symbolen besteht, dann schreiben wir die beiden Ausdrücke nebeneinander, getrennt durch ×, z. B.

$$!@\ast \times \%!$$

Jetzt ziehen wir einen Strich und multiplizieren das am weitesten rechts stehende Zeichen des linken Ausdrucks mit dem entsprechenden des rechten Ausdrucks, in unserem Beispiel also $*$ mit !. Das Ergebnis wird, wie wir der Tabelle entnehmen können, wieder aus höchstens zwei Zeichen bestehen; wir notieren das rechte Zeichen unter dem rechten Zeichen des linken Ausdrucks und merken uns den Übertrag. Dann wiederholen wir die Rechnung mit dem rechten Zeichen des rechten Ausdrucks und dem zweiten Zeichen von rechts des linken Ausdrucks, addieren zu dem Ergebnis den Übertrag. Das Ergebnis besteht wieder aus höchstens zwei Zeichen. Das rechte notieren wir links neben dem eben notierten Zeichen, also unter dem zweiten Zeichen von rechts des linken Ausdrucks, das andere Zeichen wird unser neuer Übertrag. Dann geht es weiter mit dem rechten Zeichen des rechten Ausdrucks und dem dritten Zeichen von rechts, falls es das überhaupt noch gibt. Irgendwann haben wir das Zeichen ganz rechts mit jedem Zeichen des linken Ausdrucks multipliziert. Dann wählen wir im rechten Ausdruck das zweite Zeichen von rechts und führen analoge Rechnungen durch, notieren das Ergebnis unter dem ersten Ergebnis, aber eins weiter nach links verschoben. Zum Schluss haben wir soviele neue Ausdrücke wie der rechte Ausdruck Zeichen hat. Diese addieren wir, und das Ergebnis ist unser Produkt. Für das Beispiel oben haben wir

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & ! & @ & * & \times & \% & ! \\
\hline
 & & ! & @ & * & & & \\
 & *_{!} & * & @ & & & & \\
\hline
! & \square & \square & \% & * & & &
\end{array}
$$

Die Symbole $\square, !, @, \#, \%, *$ können wir durch andere Symbole ersetzen, solange wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen den alten und den neuen Symbolen herstellen können, d. h. jedem neuen Symbol wird genau ein altes Symbol zugeordnet und jedes alte Symbol muss dann auch eine Zuordnung haben. Eine solche Zuordnung ist z. B.

$$0 \mapsto \square,\ 1 \mapsto !,\ 2 \mapsto @, 3 \mapsto \#, 4 \mapsto \%, 5 \mapsto *$$

Alles Gesagte geht dann genauso durch, wenn wir in allen Rechnungen einfach die Symbole nach der gegebenen Zuordnung ersetzen. Die Multiplikation oben hat nun zum Beispiel folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 2 & 5 & \times & 4 & 1 \\ \hline & & 1 & 2 & 5 & & & \\ & 5_1 & 5 & 2 & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & & & \end{array}$$

Das sieht nun schon viel vertrauter aus. Wir sehen also, es kommt nicht darauf an, mit welchen Symbolen wir rechnen, sondern mit wievielen. Diese Anzahl an Symbolen nennen wir die **Basis** unserer Zahldarstellung. Haben wir mehr oder weniger Symbole, also eine andere Basis, dann müssen wir erneut überlegen, wie zwei einzelne Zeichen addiert bzw. multipliziert werden. Das bedeutet, wir müssen das kleine **Einspluseins** und **Einmaleins** für diese Basis bestimmen. Das Schema, wie wir mit komplexeren Ausdrücken rechnen, verliert aber nicht seine Gültigkeit.

Da wir so gerne mit unseren Fingern rechnen, ist es naheliegend, so viele Symbole zu nehmen, wie wir Finger haben, und wir kommen zu unserer wohlbekannten Zahldarstellung durch die Symbole $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ und sprechen von einer Darstellung im **Dezimalsystem**. Computer haben keine Finger, dafür können sie zwischen "Signal" und "kein Signal" gut unterscheiden. Sie verwenden intern daher das **Binärsystem**, also ein Zahldarstellung mit zwei Symbolen wie z.B. $0, 1$. Das kleine Einmaleins und Einspluseins des Computers ist somit

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Von nun an benutzen wir zumeist stillschweigend das uns geläufige Dezimalsystem. Es sind einige Fragen offen geblieben, trotzdem schließen wir nun dieses erste Kapitel über das Zählen und das symbolische Rechnen.

Aufgaben

1. Betrachte das Einmaleins und Einspluseins für die Symbole $\square, !, @, \#, \%, *$. Was fällt dir alles auf?
2. Berechne $*@! \ + \ @@$ und $!@! \times !@!$.
3. Seien die Symbole a, b, c, d mit Zuordnung $a \mapsto \square, b \mapsto |, c \mapsto ||, d \mapsto |||$ gegeben. Gib das kleine Einmaleins und Einspulseins an.
4. Multiplikation haben wir als "wiederholte Addition" eingeführt. Wie sieht eine wiederholte Multiplikation aus?

2 Strukturieren

Halten wir nocheinmal fest, was wir im ersten Kapitel getan haben: Wir haben einer Ansammlung von unterschiedlichen Objekten eine Zeichenreihe zugeordnet, eine Strichliste oder eine Zeichenfolge, mit der einzigen Prämisse, dass Ansammlungen, die unserer Wahrnehmung nach gleichviele Gegenstände enthalten, durch denselben Ausdruck innerhalb einer Notation ausgedrückt werden. Dann haben wir arithmetische Operationen auf diesen Zeichenreihen eingeführt: Addition, die das Zusammenfassen zweier Ansammlungen modelliert und Multiplikation, die das wiederholte Ausführen von Addition darstellt. Was ist aber nun eine Zahl? Das Zeichen 3, der Ausdruck |||? Diese Frage wollen wir in diesem Kapitel beantworten.

Dazu wollen wir uns ein wenig von unserer Intuition lösen, die uns so sehr im ersten Kapitel zur Seite stand, und ein "künstliches Universum schaffen". Dieses künstliche Universum werden wir nicht explizit darstellen können. Wir können aber Prinzipien angeben, auf denen dieses Universum beruht. Die zu beobachtenden Objekte nennen wir **Mengen**, die einzige im voraus gegebene Interaktion zwischen den Objekten die **Elementbeziehung**: x ist ein **Element von** X oder x ist **in/aus** X, in Zeichen $x \in X$. Damit wir nicht über nichts reden, formulieren wir das

Prinzip 1. Eine Menge existiert.

Jetzt wissen wir, dass mindestens ein Objekt in unserem

Universum existiert. Wir werden gleich ein weiteres Prinzip angeben, das uns die Existenz von deutlich mehr Mengen sichern wird. Diese müssen wir vergleichen können. Also legen wir ein Prinzip fest, das sagt, wann zwei Mengen als gleich angesehen werden.

Prinzip 2. Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Sind X und Y Mengen und jedes Element aus X auch ein Element von Y, dann sagen wir, dass X eine **Teilmenge** von Y ist, und wir schreiben $X \subseteq Y$. Existiert darüber hinaus ein Element y in Y, das nicht in X liegt, dann sagen wir, X ist eine **echte Teilmenge** und schreiben $X \subset Y$. Das folgende Prinzip gestattet uns, bestimmte Teilmengen zu bilden:

Prinzip 3. Ist P eine Eigenschaft, die ein Element der Menge Y haben oder nicht haben kann, dann können wir die Menge X aller Elemente aus Y angeben, die diese Eigenschaft erfüllen. Wir schreiben dann für X auch

$$\{x \in Y : x \text{ erfüllt } P\}.$$

Der Ausdruck "hat die Eigenschaft" ist ein bisschen schwammig, wir werden ihn im nächsten Kapitel präzisieren.

Die Eigenschaft P kann so gewählt werden, dass sie nie erfüllt werden kann. Ein Beispiel wäre, "P drückt aus, dass x in z liegt und dass gleichzeitig x nicht in z liegt." Die Menge $\{x \in Y : x \text{ erfüllt } P\}$ ist dann leer. Nach Prinzip

2 kann es nur eine solche Menge geben, wir nennen sie die **leere Menge** und schreiben $\emptyset$ für sie.

Sind zwei Mengen X und Y gegeben, dann können wir die Menge

$$\{x \in X : x \in Y\}$$

bilden. Diese Menge besteht aus allen Elementen, die in X *und* in Y liegen, und wir nennen sie den **Schnitt** von X und Y, in Zeichen $X \cap Y$. Genauso können wir auch drei oder vier Mengen schneiden, wir können aber noch etwas viel besseres machen: Ist U eine nichtleere Menge, dann bilden wir die Menge

$$\bigcap U = \{x \in X : X \in U \text{ und } x \in Y \text{ für alle } Y \in U\},$$

wir bilden also den Schnitt über alle Mengen, die in U enthalten sind. Eine weitere Menge, die wir aus zwei Mengen X und Y bilden können, ist das **Komplement** von X in Y bzw. Y **ohne** X

$$Y \setminus X = \{a \in Y : a \notin X\},$$

dabei ist $a \notin X$ als die Verneinung von $a \in X$ zu lesen. Mit dem Prinzip 3 konnten wir Schnitt und Komplement erklären. Dagegen müssen wir die Existenz einer Menge, die aus allen Elementen aus X und aus allen Elementen der Menge Y besteht, wieder postulieren.

Prinzip 4. Zu gegebenen Mengen X und Y existiert eine Menge Z, sodass a genau dann ein Element von Z ist, wenn a ein Element von X oder ein Element von Y ist.

Die Menge Z wird die **Vereinigungsmenge** von X und Y genannt, in Zeichen $X \cup Y$.

Das "oder" in der Mathematik ist übrigens immer einschließend zu verstehen. Es gilt "A oder B", wenn A gilt, wenn B gilt, wenn sowohl A als auch B gilt. Die Frage, "Möchtest Du Tee oder Kaffe?", kann somit in der Mathematik mit "Ja" beantwortet werden, und es gibt dann drei Möglichkeiten, diesen Wunsch zu erfüllen. Nachdem wir nun die Operationen $\cap, \cup, \setminus$ kennengelernt haben, ist es ein beliebtes Spiel, die Operationen auf verschiedene Weisen auf gegebene Mengen anzuwenden, und zu sehen, wann das Gleiche herauskommt. Ein Beispiel:

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

Das sehen wir folgendermaßen ein: Ist a ein Element der linken Menge, dann liegt a in X, aber nicht in $Y \cap Z$. Das bedeutet, a liegt nicht in Y oder a liegt nicht in Z. Also liegt a in $X \setminus Y$ oder in $X \setminus Z$ und damit in der Menge auf der rechten Seite. Liegt b in der Menge auf der rechten Seite, dann liegt b in $X \setminus Y$ oder in $X \setminus Z$. Auf jeden Fall liegt b in X, aber nicht in Y und Z. Deswegen muss b in der linken Menge liegen. Beachte, dass wir zuerst nachgewiesen haben, dass die Menge auf der linken Seite in der auf der rechten und dann, dass die rechte Menge in der linken enthalten ist. Das ist ein beliebtes Vorgehen beim Nachweis von Mengengleichheit.

Stellen wir uns nun die Situation vor, dass zwei Mengen X und Y gegeben sind, und wir Elemente aus X mit Elementen aus Y vergleichen wollen, z. B. das Element a aus X und b aus Y. Wie kann ausgedrückt werden, dass a und b im Vergleich stehen, wenn unser Universum als einzige Objekte Mengen zulässt? Indem wir eine Menge angeben, die genau das ausdrückt!

Diese Menge nennen wir das **Paar** mit **erster Komponente** a und **zweiter Komponenente** b und schreiben (a, b) dafür. Sie soll durch folgende Eigenschaft charakterisiert sein:

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \text{ und } b = y$$

Dabei bedeutet das Zeichen $\Leftrightarrow$, dass die Aussage links von dem Zeichen genau dann erfüllt ist, wenn die Aussage rechts davon erfüllt ist. Nun bilden wir für alle x aus X und alle y aus Y solche Paare und fassen alle zu der Menge $X \times Y$ zusammen. Dass wir das dürfen, erlaubt uns das

Prinzip 5. Zu zwei gegebenen Mengen X und Y können wir die Menge aller Paare $X \times Y$ bilden.

Diese Menge $X \times Y$ ist schon ein Vergleich, oder wie wir eleganter sagen, eine **Relation**, nämlich diejenige, die jedes Element aus X mit jedem Element aus Y in Relation setzt. Weil alle möglichen Elemente miteinander verglichen werden, sprechen wir auch von der **Allrelation**. Eine weitere Relation ist die sogenannte **Identität** auf X, die Menge der Paare (x, x) mit $x \in X$. Zwei Objekte stehen in Vergleich, wenn sie gleich sind. Interessanter sind natürlich alle Relationen, die zwischen Identität und Allrelation liegen. Ist R eine Teilmenge von $X \times Y$, das heisst, jedes Element aus R ist auch Element von $X \times Y$, dann sagen wir, dass R eine **Relation** zwischen X und Y ist. Elemente aus R sind also Paare (x, y) mit x aus X und y aus Y. Wir schreiben aber lieber xRy anstelle von "(x, y) ist in R". Ist R eine Teilmenge von $X \times X$, dann sagen wir einfach, R ist eine **Relation auf** X. Die interessantesten sind die **Äquivalenzrelationen**, die die folgenden drei Eigenschaften haben:

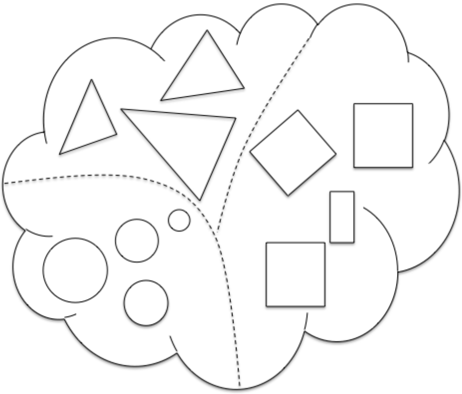
Reflexivität	Für alle x aus X gilt xRx.
Symmetrie	Gilt xRy, dann auch yRx.
Transitivität	Gilt xRy und yRz, dann auch xRz.

Zu jedem x aus X soll x/R aus allen Elementen y aus X mit xRy bestehen, also

$$x/R = \{y \in X : xRy\}$$

Wir nennen diese Menge die **Äquivalenzklasse** von x bzgl. R. Das Element x ist sicherlich selbst ein Element aus x/R wegen xRx. Gilt aber xRy, dann ist auch y ein Element von x/R.

Wenn wir im Alltagsleben mit Aussagen wie "x hat die gleiche Form wie y", "x hat die gleiche Farbe wie y" beschreiben, dass Dinge ähnlich sind, dann erhalten wir Relationen, welche die eben beschriebenen Eigenschaften haben. Durch Äquivalenzrelationen führen wir also das Konzept der Ähnlichkeit in unser Mengenuniversum ein und in Äquivalenzklassen werden ähnliche Elemente zusammengefasst. Wir werden in ein paar Seiten sehen, wie wir mit Hilfe von Äquivalenzrelationen neue Mengen erhalten, in denen die Mengen äquivalenter Elemente zu einem neuen Element zusammengefasst werden. Dafür benötigen wir aber erst einmal eine weitere Familie von Relationen.



Die Äquivalenzrelation "x und y haben dieselbe Form" führt zu den Äquivalenzklassen "Rechteck, Kreis, Dreieck".

Sei nun R eine Relation zwischen X und Y, also eine Teilmenge von $X \times Y$. Wir sagen, dass R **funktional** ist, falls aus xRy und xRz stets $y = z$ für alle y, z aus Y und alle $x \in X$ folgt. Eine **partielle Abbildung** f aus X in Y ist festgelegt durch die Angabe

- der Menge X,
- der Menge Y
- und einer funktionalen Relation $R \subseteq X \times Y$.

Wir schreiben dann $y = f(x)$, wenn xRy gilt. Gibt es zu $x \in X$ ein $y \in Y$ mit $x\,R\,y$, so sagt man, f ist für x **definiert** und die Menge aller dieser x ist der **Definitionsbereich** von f. Die Menge Y wird der **Wertebereich** bzw. die **Zielmenge** genannt. Die Menge

$$\{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$$

nennen wir das **Bild** von X unter f.

Ist f auf ganz X definiert, so sagen wir, f sei eine **Abbildung** oder **Funktion** von X in Y. Wir schreiben dafür $f : X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ mit Abbildungsvorschrift $f(x) = y$ oder $x \mapsto y$.

Beispiel. Für jede Menge X existiert die **identische Abbildung** $id_X : X \to X$, gegeben durch $id_X(x) = x$. Die zu dieser Funktion gehörende funktionale Relation ist gerade die Identität auf X.

Seien $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ Funktionen mit Definitionsbereichen X_1 bzw. X_2. Ist das Bild $f_1(X_1)$ des Definitionbereichs von f_1 Teil des Definitionsbereichs X_2 von f_2, so liefert die Relation $R \subseteq X_1 \times Y_2$ mit

> xRz gilt genau dann, wenn ein $y \in Y_1$ mit $f_1(x) = y$ und $f_2(y) = z$ existiert

eine Funktion $f_2 \circ f_1 : X_1 \to Y_2$ mit Definitionsbereich X_1, die **Komposition**, lies: f_2 nach f_1. Wir können schreiben

$$z = (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)).$$

Mit "Funktion" ist der zweite wesentliche Begriff nach "Menge" gefallen. Wir stellen uns hier auf den Standpunkt, dass Funktionen bestimmte Mengen sind, wollen aber nicht verschweigen, dass wir unser Universum auch auf dem Funktionsbegriff hätten aufbauen können. Nun werden wir einige Eigenschaften von Funktionen kennenlernen. Diese Eigenschaften wollen wir charakterisieren und vergleichen. Die Resultate werden wir in der üblichen Form der Mathematik präsentieren, als Lemma, Satz oder Korollar, gefolgt von einem Beweis. Diese neuen Begriffe benötigen noch einer Erklärung. In der Mathematik werden Aussagen aus anderen Aussagen - den Axiomen - abgeleitet. Man nennt diesen Vorgang **beweisen**. Wenn eine gewisse Aussage A bewiesen worden ist, und man aus A die Aussage B ableiten kann, so gilt auch B als bewiesen.

Einführungen in die Mathematik für Studienanfänger gibt es einige. Diese hier ist anders. Es geht nicht um eine schnelle Wiederholung des Schulwissens oder um das Einüben von Rechenregeln. Im Vordergrund stehen Fähigkeiten, die ein mathematisch denkender Mensch haben sollte wie Abstrahieren, Formalisieren, Konstruieren, ... Damit soll eine kleine Einstimmung gegeben werden, wie Mathematik an der Universität vermittelt wird und wie sie sich von der Schulmathematik unterscheidet.

Mein Ziel wäre erreicht, wenn ein Leser ein "Gefühl" für Mathematik entwickelt und sich nach der Lektüre auf die Mathematikvorlesungen an der Universität freut.

ISBN: 978-3-00-046973-2 8€

9783000469732